

Cotação da 1ª Parte: 7 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome: \_\_\_\_\_

Número: \_\_\_\_\_

**Formulário.** Axiomática: P1.  $P(A) \geq 0$  P2.  $P(\Omega) = 1$  P3. Se  $A \cap B = \emptyset$  então  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$\text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - \mu^2; \text{Cov}(X, Y) = E\{(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\} = E(XY) - E(X)E(Y);$$

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y); \text{Var}(aX + bY) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y) + 2ab \text{Cov}(X, Y); E(Y) = E_X[E(Y | X)];$$

$$\text{Função geradora de momentos: } M_X(s) = E(e^{sX}); E(X^r) = M_X^{(r)}(0)$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}; S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \bar{X}^2; S'^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}; (n-1)S'^2 = nS^2$$

$$X \sim \chi_{(n)}^2 \text{ então } E(X) = n; \text{Var}(X) = 2n; M_X(s) = (1-2s)^{-n/2}, s < \frac{1}{2}; \gamma_1 = \sqrt{8/n}; \gamma_2 = 3 + 12/n$$

[Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale -2,5. A classificação desta questão variará entre um mínimo de zero e um máximo de 10]

Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva.

1. Seja  $X$  uma variável aleatória com função de distribuição  $F(x)$ , f.d.p ou f.p.  $f(x)$  e  $a, b \in \mathfrak{R}$ .

	V	F
A função densidade de uma variável aleatória contínua não pode assumir valores superiores a 1.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Se $X$ é uma variável aleatória contínua então $P(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a^-)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Se $X$ for mista, $F(x)$ tem pelo menos 1 ponto de descontinuidade.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Se $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$ então $X$ é uma variável aleatória contínua.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

2. Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias com média e variância, respectivamente  $\mu_X, \sigma_X^2, \mu_Y, \sigma_Y^2$ .

	V	F
Seja $M_X(s)$ , a função geradora de momentos de $X$ . A existência de $M_X'(0)$ e $M_X''(0)$ garante a existência de $\text{Var}(X)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Se $X$ tiver distribuição Binomial então $\mu_X > \sigma_X^2$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$Z = (X - \mu_X) / \sigma_X \sim \text{Normal}(0;1)$ , necessariamente.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Seja $(X, Y)$ a variável aleatória bidimensional correspondente. Se $F_{X,Y}(1.5, 2.3) = 1$ , então $F_Y(2.3) = 1$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

3. Seja  $\{A_1, A_2, A_3\}$  uma partição de  $\Omega$ , com  $P(A_i) > 0, i = 1, 2, 3$ , e  $A$  e  $B$  dois acontecimentos de  $\Omega$ :

	V	F
$A$ e $B$ têm probabilidade positiva. Se $A$ e $B$ são incompatíveis então $P(A B) = 0$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Se $P(A) = 0.55, P(B) = 0.45, P(A - B) = 0.25$ então $A$ e $B$ podem constituir uma partição de $\Omega$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Se $A$ e $B$ são independentes então $P(A B) = P(B)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Os acontecimentos $A_1, A_2$ e $A_3$ são mutuamente independentes.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

4. Seja  $(X_1, X_2, \dots, X_n), n > 2$ , uma amostra casual simples retirada de uma população  $X$  com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$  desconhecidas. Considere ainda a média e variância amostrais, respectivamente  $\bar{X}$  e  $S^2$ .

	V	F
$E[S^2] > \sigma^2$ .		
Se $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ então $\bar{X} \sim \text{Poisson}(\lambda/n)$ .		
As variáveis aleatórias $X_1, X_2, \dots, X_n$ são i.i.d.		
$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ é uma estatística.		

**Atenção:** Das seguintes 3 questões responda apenas a 2 (Resposta a 3 questões anula 2) [Cotação: 15+15].

5. Sejam  $A$  e  $B$  acontecimentos definidos no espaço de resultados  $\Omega$ . Sabendo que  $A$  e  $B$  são independentes, **prove** que  $A$  e  $\bar{B}$  também o são. [Cotação: 15]

6. Sejam as variáveis aleatória contínuas,  $X$  com função distribuição  $F_X(x) = x, 0 < x < 1$ , e  $Y = -\ln(1 - X)$ . Mostre que a função distribuição de  $Y$  é dada por

$$G(y) = F_Y(y) = 1 - e^{-y}, \text{ para } y > 0.$$

[Cotação: 15]

7. Seja  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  uma amostra casual extraída de um universo  $X$  com distribuição Exponencial de média 1. Encontre a distribuição da amostra. Justifique todos os passos. [Cotação: 15]



Nome: \_\_\_\_\_ Número: \_\_\_\_\_

**Espaço reservado para classificações**

1.a) (20)	2.a) (25)	3.a) (10)	4.a) (10)	T:
1.b) (10)	2.b) (15)	3.b) (20)	4.b) (20)	P:

1. Uma empresa contrata recém-licenciados dos cursos de Economia, Gestão e Finanças de várias universidades de Lisboa, sabendo-se que 20% são do curso de Gestão e que a restante percentagem é igualmente repartida entre as outras duas licenciaturas. Da licenciatura em Gestão sabe-se que 50% das contratações são provenientes do ISEG, enquanto as restantes percentagens de “iseguanos” são de 75% e 25% para os cursos de Economia e Finanças, respectivamente.

a) Tendo-se verificado que a última contratação foi proveniente do ISEG, qual a probabilidade de ter sido do curso de Gestão?

b) Escolhidas ao acaso, desta empresa, 15 pessoas recém-contratadas, qual a probabilidade de mais de 8 ter licenciatura em economia? [Assinale com uma **CRUZ** no quadrado adequado. Resposta errada vale -2.5]

0.0950     0.1181     0.8819     0.2132

2. Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias discretas e independentes que representam as vendas diárias, em unidades, de dois artigos numa determinada loja. As respectivas funções probabilidade são:

$$f_X(x) = \frac{x}{6} \quad (x = 1, 2, 3); \quad f_Y(y) = \frac{2 - |y - 2|}{3} \quad (y = 1, 2)$$

- a) Obtenha a tabela da função probabilidade conjunta de  $X$  e  $Y$ , e calcule a percentagem de dias em que se vende igual número de unidades dos dois artigos.

- b) Calcule a média das vendas totais diárias.

3. A duração de uma chamada efetuada pela Eva, em minutos, é uma variável aleatória  $X$  com distribuição exponencial de variância igual a 25. Assuma a independência entre as chamadas realizadas.

a) No tarifário da Eva o preço por minuto em euros,  $Y$ , é função da duração da chamada, definido como:  $Y = 0.25 + (0.04/X)$ , sendo que o custo total da chamada em euros é  $XY$ . Qual é o custo médio, em euros, de uma chamada efetuada pela Eva? [Assinale com uma **CRUZ** no quadrado adequado. Resposta errada vale -2.5]

1.53

2.00

1.29

1.44

b) Não estando satisfeita com o tarifário anterior, a Eva decidiu alterar, passando agora a pagar por minuto um montante fixo de 25 cêntimos. Num mês em que a Eva efetuou 30 chamadas, qual a probabilidade de ter gasto um valor superior a 35 euros?

4. Numa determinada região, a quantidade de proteína, em gramas, que uma pessoa adulta ingere por dia é uma variável aleatória com distribuição normal de média 55 e desvio padrão 5. A recomendação diária é de 0.8 gramas por quilo de peso corporal.

a) De uma amostra casual de 10 pessoas com 60 quilos cada, qual é aproximadamente a probabilidade de o menor consumo proteico registado ser superior à recomendação diária para este grupo de pessoas? [Assinale com uma **cruz** no quadrado adequado. **Resposta errada vale -2.5**]

0.27

0.55

0.62

0.43

b) Numa outra região, independente da anterior, a quantidade de proteína consumida por dia tem também distribuição normal de média 55 gramas, mas com desvio padrão 4. Assumindo que se vai retirar uma amostra com igual dimensão de cada uma das regiões, qual deverá ser essa dimensão para que o desvio, em termos absolutos, entre a diferença das médias amostrais e a diferença das verdadeiras médias não exceda 0.5 gramas em 90% dos casos?